數學傳播　49卷1期, pp. 16-26

廣義相對論中的數學理論

王慕道 院士

新科院士演講, 2024 年 6 月 27 日[1]

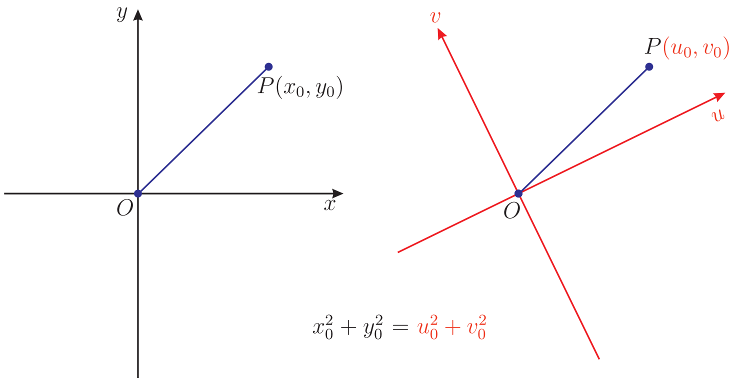
感謝您的介紹。非常高興在此見到諸多朋友, 並感謝各位的邀請。我很榮幸能夠加入中央研究院, 並期待這是我們長期合作的良好開端。我此次演講的題目是「廣義相對論中的數學理論」。作爲一名數學家, 我希望在演講結束時, 能夠說明廣義相對論中存在許多非常有趣的問題, 值得我們數學界深入研究。

愛因斯坦在 1915 年創建了廣義相對論, 距今已有 100 多年了。這一理論建立在狹義相對論的基礎上, 而狹義相對論則於 1905 年, 也就是廣義相對論發現前 10 年確立。狹義相對論基於兩個公理。第一個是光速是常數, 第二個是沒有比光傳播得更快的東西。這兩個公理解決了一個困擾當時物理學界的重要問題。在那個時候, 人們尚未理解光是如何傳播的, 因此提出了一個假想的乙太爲光傳播的媒介。一旦接受了狹義相對論的兩個公理, 就不需要任何假想的乙太來解釋光的傳播。

愛因斯坦非常重視公理化相對論; 他在多篇論文中將這種方法與純數學中的歐幾里得幾何進行了比較。狹義相對論實際上可以被看作是一個新的畢氏定理。具體而言, 假設在平面上有兩個點 O 和 P, 我們可以使用不同的坐標系, 如 (x, y) 或 (u, v) 坐標, 來描述這兩點。假設點 O 總是位於原點, 但 P 在不同坐標系中可能表示爲 (x_0, y_0) 和 (u_0, v_0), 儘管它們代表同一個點。然而, 根據畢氏定理的公式, 即使在不同的直角三角形中, 計算出的兩點距離始終一致: $x_0^2 + y_0^2 = u_0^2 + v_0^2$。在狹義相對論中, 我們描述兩個在時空中的事件。假設有兩個事件 O 和 P, 亦可使用不同的坐標來描述它們。物理學家喜歡提觀察者, 其實當他們講觀察者時, 就代表設置一個坐標系來描述這些事件。例如, 有一個坐標系 (x, t), 其中 x 表示空間, t 表示時間。一個事件位於原點 $O(x = 0, t = 0)$, x 等於 $0, t$ 也等於 0。另一個事件 $P(x = x_0, t = t_0)$, 即坐標 x 等於 x_0, t 等於 t_0。這些坐標取決於觀察者, 不同的觀察者會有不同的空間和時間坐標。但是 $-x_0^2 + t_0^2$, 也就是所謂的「勞倫茲範數 (Lorentzian norm)」必定相同。無論在哪個坐標系或是哪個觀察者, 當你觀察兩個時空事件時, 它們會出現不同的 x_0 和不同的 t。但如果

[1]影片網址:
https://www.youtube.com/watch?v=l5nFteDX-cY&list=PLlPkilLR3TiEoKuwNAqvNktx64SIbAozQ&index=12&t=5s

你計算此數量, 它始終是相同的。因此這是一個不變量, 就像畢氏定理中的不變量一樣, 它是一個獨立於坐標系的不變量。任兩個觀察者在兩個事件 O 和 P 間記錄相同的勞倫茲範數。愛因斯坦常用不同的例子, 比如火車或馬車來描述這些現象。所有這些最終都可以歸結爲這個公式。



在廣義相對論方面, 愛因斯坦需要更多的數學, 特別是 Hermann Minkowski 的工作。Minkowski 曾是愛因斯坦在 ETH 的老師。愛因斯坦提出了狹義相對論, 但是 Minkowski 將其空間表述爲著名的 Minkowski 空間, 即我們熟知的由三個空間維度 x、y、z 和時間坐標 t 組成的四維空間, 稱爲時空。此外, 勞倫茲 (Hendric A. Lorentz) 討論了度量的等距群 (isometry group)。黎曼幾何在此也不可或缺, 它是由黎曼大約 50 年之前創立的。張量微積分也至關重要, Maxwell 已用它來表述電磁理論的數學公式。

廣義相對論

在愛因斯坦的廣義相對論理論中。時空是一個 4 維勞倫茲流形 (M, g), 但它只在局部類似於 Minkowski 空間。它有一個大域的度量, 即所謂的勞倫茲度量 g。因此這是一個配備了勞倫茲度量的 4 維空間, 其符號數與 Minkowski 空間的符號數相同, 是 -1、1、1、1。然而, 此處的度量 g 不再是恆定或平坦的度量。事實上, g 的導數及二階導數構成了曲率, 而重力上是藉由勞倫茲度量的曲率來描述的, 並且由愛因斯坦方程決定。

這是愛因斯坦方程

$$Ric - \frac{1}{2}R_g = 8\pi T;$$

這是一個張量方程, 其中 Ric 代表 g 的 Ricci 曲率張量, 是一個 g 的二階導數的組合。R_g 是 g 的純量曲率, 由 Ricci 取 trace 而來。方程右側是物質密度的能量動量張量 (energy momentum tensor of matter density), 表示爲 T, 取決於所使用的物質類型, 例如電磁場或純量場。左側描述了重力效應, 右側則描述物質場的影響。因此, 這是一個統一空間、時間和重力的理論。

這次演講中, 爲了簡化討論, 我假設 $T=0$, 這意味著沒有物質存在, 因此我們僅考慮重力方程。當方程右側等於零時, 代數計算顯示 Ricci 曲率等於零, 且純量曲率 R 亦爲零。這就是所謂的愛因斯坦真空方程 (Einstein Vacuum Equation)

$$Ric(g)=0,$$

縮寫爲 EVE。勞倫茲度量的二階導數計算非常複雜。在此不寫下 Ricci 曲率的公式。

重要的是, 這個 EVE 方程在坐標變化下是不變的。也就是說, 你可以使用任何不同的坐標, 甚至是彎曲的坐標 (有別於上述的 x,y,z,t)。如果 Ricci 曲率在一個坐標系等於 0, 那麼它在另一個坐標系也必須等於 0。這個方程和拉普拉斯方程 $\Delta f=0$ 一樣基本; 拉普拉斯方程是我們自三維空間 $\mathbb{R}^3$ 上的多變數微積分就熟悉的方程, 它決定了牛頓重力。但這裡的愛因斯坦真空方程 EVE 比拉普拉斯方程要複雜一些; 它是一個由 10 個未知函數和 10 個方程組成非線性偏微分系統。

史瓦西 (Schwarzschild) 解

1915 年愛因斯坦發布相對論之後幾個月, Karl Schwarzschild 在第一次世界大戰前線服役期間, 找到了愛因斯坦真空方程的第一個非平凡解。我們將 Minkowski 度量視爲平凡解, 因爲它實際上只對應於常數的 g, 取二階導數, 一切就都消失了。Schwarzschild 找到的解是第一個非平凡解。假設重力場是球對稱的, EVE 變成一個可積的常微分方程, 而且有一個非常好的形式。我們知道 Minkowski 度量實際上只是 $\mathbb{R}^3$ 加上一個時間維度。如果選擇球面坐標來描述 $\mathbb{R}^3$ 上的平坦度量。那麼 Minkowski 度量有這個形式

$$-dt^2+dr^2+r^2d\Omega^2,$$

第一項時間維度有一個負的符號數, 其後只是 $\mathbb{R}^3$ 中球坐標中的平坦度量。在這個坐標中, Schwarzschild 的解非常簡單:

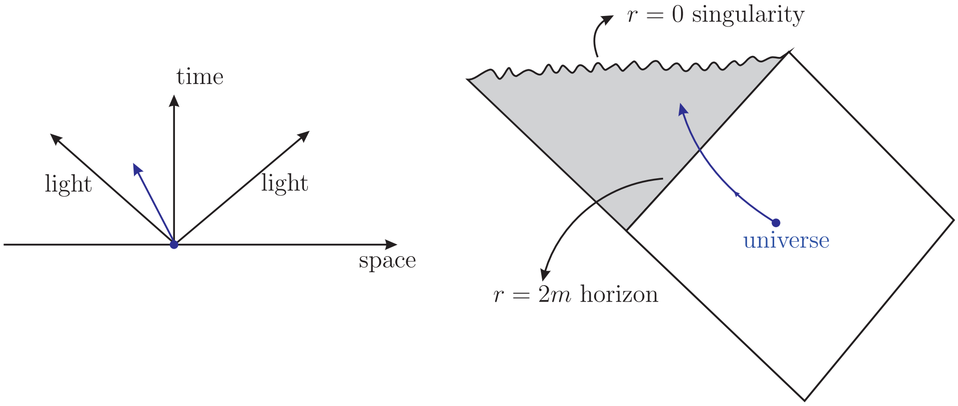
$$-\Big(1-\frac{2m}{r}\Big)dt^2+\frac{1}{1-\dfrac{2m}{r}}dr^2+r^2d\Omega^2.$$

只需將度量中時間維度的係數 -1 更改爲此表達式 $-(1-\frac{2m}{r})$, 並將空間部分的係數 1 更改爲表達式 $\dfrac{1}{1-\frac{2m}{r}}$。特別是, 當半徑 r 趨於無窮大時, 這個項 $\frac{2m}{r}$ 消失了。因此當 r 趨於無窮大時, Schwarzschild 的解趨近 Minkowski 度量。這意味著, 在無窮遠處, 曲面會變得非常非常平坦, 幾乎沒有重力。這被當作是一個孤立的重力系統。接近無窮大時, 重力會變得非常微弱, 最終趨近於 Minkowski 度量。這個解在 $r=0$ 時是未定義的。你可以看到, 當 $r=0$ 時, 第一個係數爆掉了。當 $r=2m$ 時, 第二個係數爆掉了, 所以這也是未定義的。但請記住我提到

過: 愛因斯坦方程, 在坐標變換下是不變的。你可以嘗試選擇一個不同的坐標, 把它改寫成沒有奇點的形式。事實上確實如此。選擇不同的坐標系後, 你會發現 $r = 2m$ 的奇點實際上是可去除的。你可以選擇不同的坐標系, 以不同的形式寫它, 使得所有係數都是有界且平滑的函數。我不打算在這裡寫下這個坐標變化。我只想強調一下, 這是一個幾何方程, 它與坐標系無關。

黑洞與視界

然而 $r = 0$ 代表了真正的奇點; 這是曲率爆掉的地方。曲率在此沒有定義。雖然以上 Schwarzschild 度量表達式包含一些未定義的係數, 但可以計算出在 $r = 2m$ 時的曲率一切正常。事實上, Schwarzschild 的解是一個黑洞解, $r \leq 2m$ 代表一個黑洞。黑洞這個術語在 1970 年代才由惠勒提出。$r = 2m$ 實際上代表視界 (horizon)。一旦越過了視界進入 $r < 2m$ 的區域, 就無法逃離這個區域; 特別是, 光也無法逃離這個區域, 因此被稱爲黑洞。



這是一張用來描述黑洞的圖, 就是所謂的彭羅斯圖 (Penrose diagram)。在左邊可以看到一幅二維圖片, 只有一個空間維度的 x 坐標和一個垂直方向的時間 t 坐標。光速預設等於 1; 當速度等於 1 時, 斜率也等於 1。兩個 45° 線的方向代表光傳播的方向, 沒有比光傳播更快的東西。這就顯示: 一個粒子會在這兩條 45° 線之間移動並前往未來。藍色箭頭代表粒子的方向。這是 Schwarzschild 黑洞的彭羅斯圖, 菱形區域代表我們的宇宙, 而 45° 線代表視界 $r = 2m$。r 不斷減小, 直到 $r = 0$, 這是奇點。如果你從宇宙中的某個點向這個方向移動, 進入 $r \leq 2m$ 的區域, 你將被限制在這兩條 45° 線之間, 永遠無法逃脫。你可以用它來製作一個電腦遊戲。我想駕駛星際飛船靠近黑洞而不掉進黑洞會很有趣。

這張彭羅斯圖顯示黑洞區域 $r < 2m$ 和視界 $r = 2m$。進入視界後, 由於行動受限於 45° 線, 永遠無法脫離。十八世紀時, John Michell 和 Pierre-Simon Laplace 預言了黑洞。他們的預測只基於一個非常簡單的假設: 光速是有限的。但這在當時是未知的。在光速有限的假設下, 根據牛頓重力理論, 如果天體密度過高, 光會無法逃脫。以上對 $r = 2m$ 的討論也顯示, 由於坐標變換不變性, 求解愛因斯坦真空方程實際上更加微妙。你可以寫下一個似乎未定義的解,

然後改變坐標來使它定義良好。這就是求解愛因斯坦真空方程時的所謂規範選擇。在求解愛因斯坦真空方程時, 這是一個巨大的挑戰。

Kerr 的解

Schwarzschild 在愛因斯坦提出廣義相對論理論之後幾個月, 就找到了他的解。隨後學者又發現了愛因斯坦真空方程的其它明確的解。在後續這些解中, 一個最重要的是所謂的 Kerr 解。它於 1968 年被發現。這又是一個黑洞解。但 Schwarzschild 發現的那個解, 是一個靜態的 (steady) 黑洞, 這意味著黑洞就坐在那裡, 根本不動。

但 Kerr 解描述一個旋轉的黑洞, 有兩個參數 (m, a)。Schwarzschild 解有一個參數 m。當然這是解常微分方程得到的結果。但我們將看到, 這個 m 實際上代表黑洞的質量。而旋轉黑洞不僅有質量, 還有角動量來描述其旋轉速度。Kerr 的解是一個旋轉黑洞的解, 形式相當複雜。我不試圖把它寫下來。這是一個度量張量, 有 10 個分量, 且滿足 EVE 方程 $\text{Ricci} = 0$。

彭羅斯奇點定理 (1965)

隨後, 黑洞理論有兩個主要發展, 其中一個是彭羅斯奇點定理 (Penrose singularity theorem)。彭羅斯 (Roger Penrose) 因這一定理在兩年前獲得諾貝爾獎。他受過數學家的訓練, 專攻代數幾何學。這一定理指出, 黑洞是普遍存在的。對 Schwarzschild 黑洞而言, 一旦進入視界, 未來會有一個奇點, 即 $r = 0$。彭羅斯將這幅圖景推廣到更一般的時空, 討論一般時空中 $r = 2m$ 的意涵及奇點 $r = 0$ 的意涵。

黑洞實際上具有普遍性。在 Schwarzschild 的度量, $r = 2m$ 的視界將導致 $r = 0$ 的奇點。彭羅斯了解到有一種方法, 可以爲一般時空重新構建這個機制。在 Schwarzschild 的度量, $r = 2m$ 存在所謂的囚陷曲面 (trapped surface), 它的平均曲率 (亦即膨脹) 小於 0。他還找到了一種方法在一般的時空中表述對應於 $r = 0$ 的奇點, 這對應於測地線的不完備性。一旦時空有一個囚禁曲面, 如同 Schwarzschild 的 $r = 2m$, 那麼在一些相當普遍的條件下, 未來一定有一個奇點。

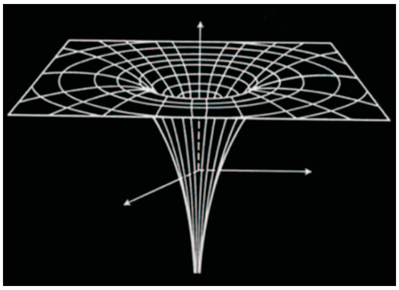
這是一段漫長的旅程, 天文物理學家很久以後才相信黑洞的存在。早期他們觀測到恆星圍繞著一個黑暗中心旋轉, 於是他們意識到那裡一定有看不見的東西。但早在 1915 年, Schwarzschild 就提出黑洞解。而在 1965 年, 彭羅斯已證明這是普遍的現象。只要你有一個視界或一個囚陷曲面, 那麼未來必然會有一個奇點。

第二個定理是黑洞唯一性定理 (black hole uniqueness theorems/no-hair theorem)。

黑洞唯一性定理 (1967∼)

前一個定理告訴你, Schwarzschild 解的這幅圖, 實際上是相當普遍的。當你得到

Schwarzschild 解時, 你做很多假設, 所以可能奇點只是因爲你選擇了一個特殊的坐標而變得特殊。但彭羅斯奇點定理告訴你, 黑洞實際上是普遍存在的; 只要有一個囚陷曲面, 就會有一個奇點。第二個定理則指出黑洞是唯一的。它們聽起來矛盾。但是這個定理可以很容易地用數學來表述。這項工作開始於 1965 年, 這是 Werner Israel 的第一篇論文以及一系列黑洞唯一性論文的結果。這實際上是在討論愛因斯坦真空方程穩態解在邊界條件限制下的唯一性。你可以用偏微分方程理論來表述, 類似於偏微分方程中 Liouville 定理。Schwarzschild 解就是這樣的一個例子。



我現在用不同的圖, 就是所謂的重力井的圖。你有一個視界 $r = 2m$。當你一直向外走, 它會漸近平坦; 如我剛才所說: 當 r 趨近無窮大時, 它接近一個平坦的解。假設其穩定 (stationary), 它可變成一個三維圖, 因爲你可以去掉 t 參數。你求解愛因斯坦真空方程的三維解, 並假設內部有一些黑洞邊界條件。所謂的黑洞唯一性是說: 假設一些漸近平坦性 (即無窮遠的邊界條件) 以及黑洞邊界條件, 證明 EVE 解的唯一性。我們特別討論 Kerr 解的唯一性。Kerr 解是愛因斯坦真空方程的大域解。若給定對應於黑洞條件的內邊界條件, 並給定它的漸近平坦性, 求解愛因斯坦真空方程, 最終會得到 Kerr 解。在某種程度上, 這個方程真的表現得非常好; 雖然是非平凡的黑洞解, 但確實有唯一性, 由質量和角動量參數化。

聽眾: 請問您提到的與時間無關意指什麼?

答: 我的意思是, 當你寫下度量時, 仍然有一個 t 坐標, 但它只是不斷重複。這是穩定的 (stationary), 而不是靜態的 (static)。在靜態的情況下, 如 Schwarzschild, 它完全不會移動。但 Kerr 是一個一直轉動的黑洞。

聽眾: EVE 有其它明確解?

答: 是的, 確實有一些明確解, 但如果你談的是愛因斯坦真空解的大域 stationary 解, 那麼它就是 Kerr 解。我稍後會談到, 你可以求解一個偏微分方程, 並嘗試描述完整的解。

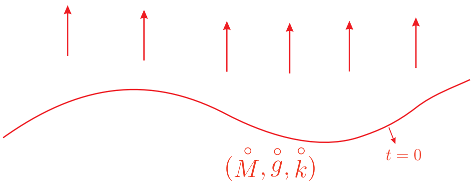
EVE 的初始值問題形式/哈密頓形式

愛因斯坦真空方程及均曲率方程彼此相關。在幾何偏微分方程, 研究最多的兩個方程, 是度量 g 的愛因斯坦方程和曲面 Σ 的最小表面方程:

$$Ric(g) = 0, \qquad H(\Sigma) = 0.$$

我們對這兩個偏微分方程的理解已有很大的進展。但是我們仍需要更多的了解。截至 1980年代, 所有已知的愛因斯坦真空解的大域解, 都是基於一些對稱性假設的明確解。

在 Kerr 解的情況, 不僅需要假設穩定性, 還要做更多的假設才能明確地解它。但並非每個時空都滿足這些假設。因此我們需要有某種更通用的方法來構建更一般的解, 特別是求解愛因斯坦真空方程的動力解。因此有了這種初始值問題, 你或可稱它爲愛因斯坦真空方程的哈密頓形式。它被表述爲初始值問題。在這種情況下, 當你在求解一個四維時空時, 未知數當然是勞倫茲度量, 但你要做的是從 $t = 0$ 起步。但 $t = 0$ 時對應了一個三維空間; 由於你施加了一個三維條件, 所以這是一個三維流形。你可以考慮一個三維流形 $\mathring{M}$, 具有給定的初始函數 $\mathring{g}$ 和給定的稱爲動量的一階導數 $\mathring{k}$。你嘗試求解這個二階偏微分方程。箭頭指向時間方向, 這是一個初始值問題的形式。



我們分兩個步驟求解。首先, 要構建初始資料的集合 $(\mathring{M}, \mathring{g}, \mathring{k})$ 。這是一個偏微分方程。你選取任意切片作爲初始資料。這些初始資料必須滿足一些源自愛因斯坦真空方程的方程 (亦即愛因斯坦 constraint 方程)。$\mathring{M}$ 是一個三維流形, 你著手解決度量問題, 著眼於三維流形 $\mathring{M}$ 上的初始度量 $\mathring{g}$。而 $\mathring{k}$ 基本上對應於初始度量 $\mathring{g}$ 的一階導數。我們想接著求解愛因斯坦真空方程的二階方程。在此情況, $\mathring{M}$ 是黎曼流形, 而非勞倫茲流形。

第二步是 1970 年代由 Yvonne Choquet-Bruhat 和 James W. York 提出的, 是要解進化方程。你可以選擇一個特定的坐標系。將愛因斯坦真空方程重寫爲 $\Box g = 0$。這個箱形算子 $\Box$ 是一個波算子, 是你見過的波算子的非線性版本, 但這是非線性的。而後你根據初始條件進行 $\mathring{g}$ 的演化, 其中 g 的初始一階導數記爲 $\mathring{k}$。你求解這個類似波動方程的方程。這提供了生成更爲一般的解的方法。你只需要初始資料, 而後嘗試求解這個方程。但當然你希望有一些大域解, 希望能夠看到時間趨近無限。同時我們還有方法可以對此初始值在此定義總質量。

正質量定理

如前所述, 在 Schwarzschild 解中, m 代表了 Schwarzschild 黑洞的質量。但我們需要更一般的初始資料。因此, 針對一般初始資料 $(\mathring{M}, \mathring{g}, \mathring{k})$, 我們必須有能理解的質量。這是 Arnowitt-Deser-Misner 的工作。他們爲一般的初始資料定義了所謂的 ADM 質量。如果你對 Schwarzschild 解做計算, 會重新得到這個 m。經過數十年的努力, Schoen-Yau 及 Witten 在1980 年代證明了正質量定理。它證明了: 孤立引力系統的總 ADM 質量不能爲負。這實際上至關緊要, 因爲若非如此, 系統可能會不穩定。對物理學家來說, 有點令人驚訝的是, 他們的證明實際上依賴於最小曲面及三維流形的理論。這三維流形是黎曼流形。愛因斯坦方程和最小曲面方程之間的聯繫被用於證明之中。

正質量定理的證明十分困難, 因爲總 ADM 質量被定義爲無窮遠處的積分。系統必須是漸近平坦, 近似 Minkowski 空間時, 你才能測量無窮遠處的質量。這與我們通常的想法相反; 我

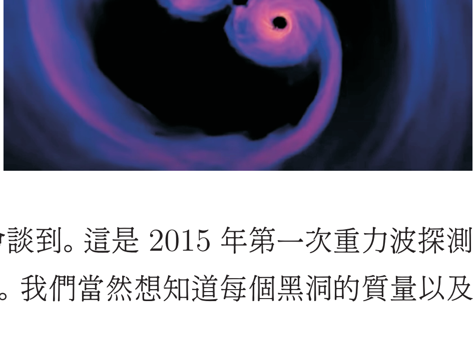
們考慮質量時, 通常會考慮質量密度, 繼而把這個質量密度積分, 以獲得總質量。但 ADM 質量並非如此, 它被定義爲無窮大處的流積分 (flux integral)。這主要是愛因斯坦的等效原理所致; 根據該原理, 重力沒有密度。這又回到了坐標不變性, 因爲所有東西都用勞倫茲度量來表示。例如, 如果你使用波動方程, 構建密度的方法是取場的一階導數, 它們會形成一些二次表達式。但勞倫茲度量的一階導數在局部沒有意義, 因爲你可以選擇特定的坐標系來使一階導數在任何點消失。這是愛因斯坦提出的, 被稱爲愛因斯坦等效原理。重力沒有密度。

數學相對論及後期發展

正質量定理的證明將數學相對論推進黃金時代, 隨後大量幾何及分析的強大工具被應用到廣義相對論的研究。讓我介紹一些與愛因斯坦真空方程及黑洞相關的後期發展。例如, 在 1990 年代初、約 1991 年, Christodoulou-Klainerman 證明了 Minkowski 時空的大域穩定性。這是初始值問題; 你取 $\mathbb{R}^3$ 並稍微擾動一下, 而後遵循愛因斯坦真空方程演化, 就可以證明大域存在性, 而且你會收斂回 Minkowski 時空。這證明 Minkowski 時空是大域穩定的。

另外, 彭羅斯定理告訴你, 一旦有了囚陷曲面, 就會有一個奇點, 亦即一個黑洞。但囚陷曲面的產生機制實際上尚不清楚。Schoen-Yau 對一般初始資料集證明了囚陷曲面的存在。另外, Christodoulou 在 2008 年的工作, 證明了囚陷曲面可以由愛因斯坦真空方程形成。最近, 有很多關於黑洞穩定性的工作。我們已經知道黑洞的唯一性。這是物理學家非常喜歡的東西; 一旦確定了唯一性, 就可以嘗試透過這個唯一性結果來建模。然而問題是這種近似值是否有穩定性。你用這個模型做各種計算, 但計算是否可靠取決於大域穩定性。Klainerman-Szeftel 最近的工作證明了小角度動量的 Kerr 黑洞解的大域穩定性。這研究是基於 Dafermos-Holzegel-Rodnianski 早期關於 Schwarzschild 線性穩定性的研究結果。

準局部質量及準局部角動量

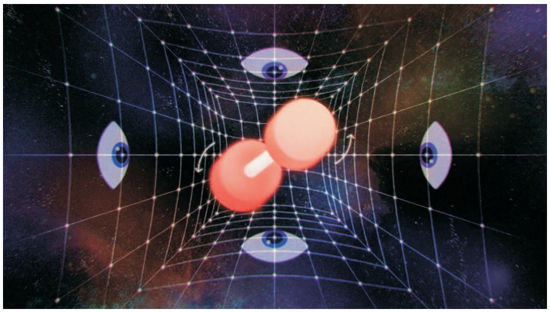


我想談談我自己的工作。我自己的工作實際上與這種質量和角動量的定義有關。在正質量定理得證之後, 彭羅斯提出了廣義相對論一系列未解決的重大問題。第 1 號和第 2 號問題是關於定義有限擴展區域 (finitely extended region) 的質量和角動量。剛才提到的 ADM 質量是在無窮遠處定義的, 實際上是在處理總質量。但在許多情況, 我們需要理解有限擴展區域的質量或角動量。請看這張圖, 我稍後會談到。這是 2015 年第一次重力波探測到的兩個黑洞合併事件。當時有兩個黑洞互相圍繞旋轉。我們當然想知道每個黑洞的質量以及系統的總質量。

當時有人提出有限擴展區域上的質量及角動量的定義。你希望能夠在任何有限區域定義它, 而非在無窮遠處定義它。這被稱爲準局部質量 (quasilocal mass) 和準局部角動量 (quasilocal angular momentum)。挑戰同樣源自愛因斯坦的等效原理。該原理意味著沒有局部重力密度。若有質量密度, 就回到微積分。可以對密度進行積分, 得到總質量。困難在於沒有密度。我和合作者陳泊寧、王業凱及丘成桐最近取得了一些進展。這項工作也解決了超平移歧義 (supertranslation ambiguity), 這一歧義自 1960 年代以來長期存在。我想談一下最近的進展, 也就是超平移歧義的解決。這歧義是什麼呢? 這歧義實際上涉及遠距離觀察者對角動量的定義, 特別是重力波帶走的角動量。

舉例來說, 有兩個黑洞, 圍繞彼此旋轉, 最終合併成一個黑洞, 並釋放出重力波。你想知道重力波帶走的角動量, 這基本上是初始角動量和合併後角動量的差異。輻射質量由 Bondi 質量明確定義, 這定義可回溯至 1962 年。2015 年 9 月首次探測到重力波, 觀察到雙黑洞合併的事件。其中一個黑洞的質量是 36, 另一個是 29。它們合併成一個質量爲 63 的黑洞。而早在 1960 年代, 就有角動量的定義。然而, 現有的角動量定義, 會導致不同觀察者之間測量結果的差異。在兩個黑洞互相旋轉的系統中, 你設置一個坐標系, 有一個角動量的定義, 從而你計算輻射掉的角動量。但這取決於坐標。如果更改坐標系結果就會不同。我們可以證明, 只要給我任何實數, 我就能找到一個觀察者看到這個量的角動量輻射。這就是自 1960 年代以來的超級平移歧義。

我們的準局部角動量理論解決了這個歧義。它提供了角動量的新定義, 具有超平移不變量。從某種意義上說, 它獨立於觀察者。這又回到勞倫茲範數。如果你沒有使用正確的定義, 而只強調 x 或 t, 不同的觀察者會看到不同的空間和時間。但是如果找到正確的勞倫茲範數, 那麼不同的觀察者會觀察到相同的勞倫茲範數。關於這項工作, 這是 Quanta 雜誌中很好的圖片。啞鈴形狀代表雙黑洞系統, 有兩個黑洞圍繞彼此旋轉。圖中的眼睛代表觀察者。不同的觀察者在觀看雙黑洞合併, 各自定義並計算角動量。現有的定義造成歧義, 致使觀察者得出互不相同的答案。但如果使用我們提出的定義, 就會得到同樣的答案。非常有趣的是, 我們的工作依賴於純數學中的等距嵌入 (isometric embedding) 理論。我們確定了一些校正項, 這些校正項來自求解等距嵌入方程。



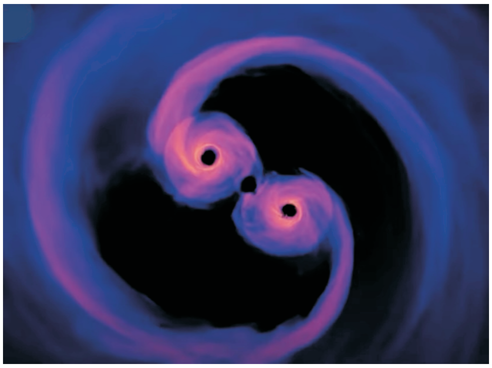
圖片來源: Quanta 雜誌, 2022 年 6 月 13 日

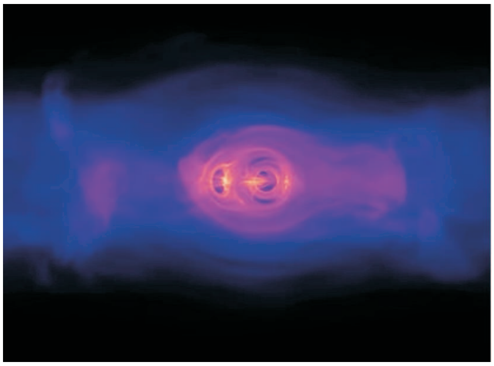
天文物理學的重大突破

我想展示一些圖片和未來展望, 或許可以與天文物理學建立聯繫。你可以看到黑洞, 它們在 18 世紀被預測, 1915 年找到第一個解, 1965 年彭羅斯證明其普遍性。但天文物理學家很久

以後才真正相信黑洞存在; 這要直到他們觀測到中心有一種看不見的物質, 所有東西都圍繞它旋轉。2022 年, 他們才真正看到了黑洞, 是由事件視界望遠鏡拍攝的第一張黑洞圖像。眼見爲信。直到 2022年, 才能真正看到黑洞的模樣。

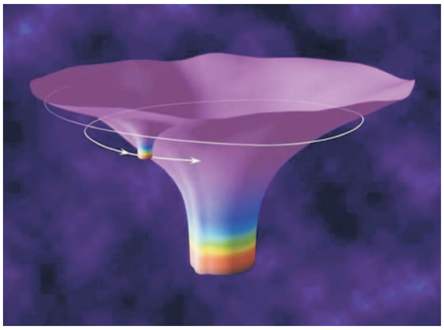
天文物理學有一些重大進步。例如, 2015 年首次探測到重力波, 2022 年看到黑洞的圖像。在某種程度上, 他們對黑洞的形狀是圓形感到驚訝。我們數學家長期以來一直假設它是圓的, 因爲在 Schwarzschild 解的情況它是圓的。但對天文物理學家來說, 除非看到黑洞中心的一個圓, 否則並不淸楚黑洞的形狀應該是什麼。





我認爲未來的前景是, 我們應該在強大場區更深入理解重力。迄今大多數研究都集中在孤立的系統上。在 Kerr 的情況, 有一個位於中心、漸近平坦的黑洞。然而, 對於非常非常接近黑洞的情況, 我們仍然所知不多。我們對所謂的雙黑洞系統也知之甚少。特別是我剛才談的那種雙黑洞系統, 是在 2015 年首次探測到重力波時觀察到的。實際上有一個 LIGO 的模擬。你可以看看。有兩個黑洞相互旋轉, 最終合併成一個黑洞。迄今這只是透過數值計算來模擬, 幾乎沒有數學理論支援。合併後, 由於變成單個黑洞, 因此應用了 Kerr 理論, 稱它爲下環區 (ring down region)。當然這是一個非常有趣的例子。但迄今我們還沒有爲這種雙黑洞系統提供任何明確的模型。

Extreme Mass Ratio Inspirals (EMRI, 極端質量比旋近)



這部分的所有研究都是透過數值計算完成的。我們對這種系統知之甚少。然而所謂的 EMRI (Extreme Mass Ratio Inspirals, 極端質量比旋近) 非常令人興奮。一般認爲新一代重力波探測器也許會在 2028 年出現。一般的雙黑洞系統仍然太難了。但我們可以在理論上對 EMRI 取得一些進展, 並與數據觀測進行比較。我的意思如下。極端質量比, 意味著你有一個超大質量的黑洞和一個小尺寸的黑洞, 小

黑洞繞著超大質量黑洞旋轉。在這種情況下, 可以做大量理論工作, 因爲有兩個參數。預計將在未來幾年內觀測到所謂的 EMRI。

—本文作者王慕道教授任教於哥倫比亞大學—